



TITLE:

安定成層中の有限振巾攪乱の数値実験 (流体力学における非線型問題)

AUTHOR(S):

田中, 浩

CITATION:

田中, 浩. 安定成層中の有限振巾攪乱の数値実験 (流体力学における非線型問題). 数理解析研究所講究録 1973, 185: 1-17

ISSUE DATE:

1973-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107197>

RIGHT:

安定成層中の有限振巾攪乱の数値実験

電波研究所 田中 浩

§ 1. はじめに

平均場と基本波の相互作用（これを準線型相互作用と呼ぶ）あるいは平均場と高調波を含む種々のモードとの相互作用（これを非線型相互作用と呼ぶ）を小さいとして無視することは、攪乱がある程度成長した段階ではもはや不可能である。このような非線型性による困難は理論的解析の前に大きな障害として立ちはだかっている。しかしながら数値実験では、もし大型コンピュータを使用すれば、かなりの興味ある結果を得ることができそうである。以下に実行される数値実験はその一つの試みである。温度場を導入したことは、この結果を気象現象に應用することを目的としているからである。また shape assumption に関する部分および論文の引用は省略してあることをおことわりしておかねばならない。

§2. 基礎方程式

いま考えている流れの状態は Fig.1 に示されるようなものである。流れは2次元的であり、流れの方向を x 、それに直角な方向を z とする。Hyperbolic tangent 型の平均流は

$$U(z) = U_0 \cdot \tanh(z/z_0) \quad (2.1)$$

で与えられている。また平均温度場としては

$$\Theta(z) = \Theta_0 \cdot \frac{z}{z_0} \quad (2.2)$$

で与えられる熱的安定成層を仮定する。理想的には上下に境界のない流れを考えたいのであるが、数値計算の都合上どうしても上下に固定境界を置かざるを得ない。そのためにできるだけ上下巾を広くとるように 上下の境界を $z = \pm 3z_0$ においた。このようにすると上下の境界附近ではそれぞれ平均流はほとんど一様でかつシアを非常に小さくできる。

このような状況のもとに、数値実験に使われる無次元化された擾動方程式として

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega + \frac{\partial(\omega, \phi)}{\partial(x, z)} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} - Ri \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla_h^2 \omega, \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \theta + \frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(x, z)} - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla_h^2 \theta, \quad (2.4)$$

$$\nabla_h^2 \phi = -\omega \quad (2.5)$$

を使う。ここで ϕ, ω, θ はそれぞれ流線函数, 渦度, 温度である。また Ri, Re, Pe はそれぞれ Richardson 数, Reynolds 数, Peclet 数でそれぞれ次のようにあらわされる:

$$\begin{aligned} Ri &= g\alpha z_0 \Theta_0 / U_0^2, & \alpha: \text{体積膨張率} \\ Re &= U_0 z_0 / \nu, & \nu: \text{動粘性係数} \\ Pe &= U_0 z_0 / \kappa. & \kappa: \text{温度伝導率} \end{aligned}$$

また一般に

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A, B)}{\partial(x, z)} &= \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial z} \\ \nabla_h^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

を意味している。

次に ϕ, ω, θ をそれぞれ Fourier 級数に展開する。

すなわち

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \omega_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} \phi_{nc} \\ \omega_{nc} \\ \theta_{nc} \end{pmatrix} \cos(nkx) - \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} \phi_{ns} \\ \omega_{ns} \\ \theta_{ns} \end{pmatrix} \sin(nkx) \quad (26)$$

平均速度と平均温度の時間変化は

$$U(z, t) = \tanh(z) + \frac{\partial \phi_0}{\partial z}, \quad (2.7)$$

$$\Theta(z, t) = z + \theta_0 \quad (2.8)$$

であらわされる。

§ 3. 準線型モデル

準線型モデルでは Fourier 展開 (2.6) において, $N=1$ まで打ちきる。これを原方程式 (2.3), (2.4) および (2.5) に代入すると, それぞれの Fourier 成分に関して次のような連立方程式系を得る:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial t} = \frac{k}{2} \left(\omega_s \frac{\partial \phi_c}{\partial z} - \omega_c \frac{\partial \phi_s}{\partial z} - \phi_s \frac{\partial \omega_c}{\partial z} + \phi_c \frac{\partial \omega_s}{\partial z} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial z^2}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \omega_c}{\partial t} = k \left(U \omega_s + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \phi_s - Ri \theta_s + \omega_s \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \phi_s \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \omega_c, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \omega_s}{\partial t} = -k \left(U \omega_c + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \phi_c - Ri \theta_c + \omega_c \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \phi_c \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \omega_s, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} = \frac{k}{2} \left(\theta_s \frac{\partial \phi_c}{\partial z} - \theta_c \frac{\partial \phi_s}{\partial z} - \phi_s \frac{\partial \theta_c}{\partial z} + \phi_c \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial t} = k \left(U \theta_s - \frac{\partial \theta}{\partial z} \phi_s + \theta_s \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \phi_s \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \theta_c, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = -k \left(U \theta_c - \frac{\partial \theta}{\partial z} \phi_c + \theta_c \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \phi_c \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \theta_s, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} + \omega_0 = 0, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \phi_c + \omega_c = 0, \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \phi_s + \omega_s = 0. \quad (3.9)$$

ただし suffix は簡略化されて, たとえば $\omega_c \equiv \omega_{1c}(z, t)$, $\omega_s \equiv \omega_{1s}(z, t)$ などのように略記されている。

これらの連立方程式を解くために, 空間差分に関

しては Dufort-Frankel 方式が使われた。この方式は熱伝導型方程式を解く場合に比較的安定性が保たれるからである。また時間積分を行なうのには, leap-frog 方式が精度の面からも, 収束性の面からも適当である。この方式は $(\Delta t)^2$ の精度をもっている。全層は 80 に分割されまた $\Delta t = 0.1$ にとられた。初期条件としては線型化されたいわゆる Taylor-Goldstein の方程式:

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi - \left[k^2 + \frac{U''}{U-c} - \frac{Ri}{(U-c)^2} \right] \phi = 0 \quad (3.10)$$

および

$$\phi = (U-c)\theta \quad (3.11)$$

より求められた固有函数を用いている。

Fig. 2 (a)~(c) は $Re = Pe = 10^3$, $Ri = 0.1$, $k = 0.5$ における温度場の時間変化を示している。この図であきらかなように温度場は周期的に変化することがわかる。温度場ばかりでなく流線も渦度も規則的に周期運動をする。Fig. 3 は層の中心レベル ($z=0$) での流線函数の大きさを $Re = Pe = 10^3$ と $Re = Pe = 10^5$ の場合について描かれた図である。 $Re = Pe = 10^3$ の場合は振動はするがその振巾は次第に小さくなる。しかし $Re = Pe = 10^5$ では 1 周期後にはほとんど初期の値にもどり, その振巾もほとんど小さくならず振動を続ける。Fig. 4 は 温度場の強さの

時間変化をあらわしている。 $Re = Pe = 10^5$ の場合の振動の周期は $Re = Pe = 10^3$ の場合よりも約2倍だけ長い。流線函数の振動と温度の振動の違いは2つある。第1は温度の強さはたとえ $Re = Pe = 10^3$ の場合でもほとんど初期の値にまで戻るような振動をする。第2は温度場は $z=0$ の位置では流線函数の半分の周期で振動をする。しかし $z=0.75$ の位置では流線函数と全く同じ周期をもつ。このことはたとえ $z=0$ の位置でも連続する2周期分を1周期と考えればもっともらしいと思われる。

Fig. 5は $z=0.75$ の位置での速度と温度の平均場の時間変化を示している。平均速度は基本波の増大に逆比例して減少し、つづいてその逆の現象が起る。これは平均場と基本波の間にエネルギーのやりとりをしている証拠となる。

$Re = Pe = 10^5$ で $k=0.5$ の場合の流線の強さの成長過程を3つの Richardson 数について Fig. 6 に示してある。この図には同時に shape assumption にもとづいて計算されたピーク値も描かれている。Shape assumption の場合の方が成長はむしろゆっくりしており、ピーク値も小さいことがわかる。

§ 4. 非線型モデル

Fourier 展開を (2.6) において $N=5$ までとり、これを (2.3), (2.4), (2.5) に代入するとかなり面倒な計算の後に、

それぞれのモードに関する多くの連立方程式(33個)を得ることができる。紙面の都合でそれらを書くことは不可能である。非線型モデルの場合は全層をコンピュータの都合で40に分割した。また $\Delta t=0.1$ である。初期条件は準線型モデルの場合と全く同じである。こゝでもやはりDufort-Frankel方式および leap-frog 方式が差分スキームに使われている。

非線型モデルでは平均流によって供給されたエネルギーは基本波を増大させるだけでなく高調波を次々に励起する。そのために準線型モデルで起ったような規則的な振動は現れない。流線函数と温度に関する振動の時間変化は Fig.3と Fig.4 にそれぞれ示されている。流線函数であろうと温度であろうと、基本波の最初のピーク値は準線型の場合とほとんど同じである。これは高調波の影響がその時点では未だ小さいからである。高調波の影響はさらに時間が経過した時点で大きくなる。

Fig.7(a)~(c) は3種類の Re と Pe の組に対するエネルギー・スペクトルの時間変化である。ただし全てに共通して $Re=0.1$ としてある。基本波の最初のピーク値は Re や Pe の値にそれほど左右されないが、それ以後のスペクトルの振舞は Re , Pe の値でかなり異なる。 $Re=Pe=10^3$ の場合は各モードのスペクトル値はある時間以後ほとんど一定になるが、 $Re=Pe=$

5×10^3 および $Re = Pe = 10^5$ の場合は高調波ほど大きくなってついに overflow してしまう。これは $N=5$ で打切っているため、それ以上の高調波にエネルギーが移動できなくて、そこにたまってしまったためであろう。

Fig. 8 (a)~(c), Fig. 8'(a)~(c) および Fig. 8''(a)~(c) はそれぞれ温度場、流線函数および渦度場の構造を $Re = Pe = 10^5$ の場合を示している。温度場に関していえば、 $\tau=35$ ぐらいで局所的に逆転があらわれる。この現象は $\tau=50$ でより顕著になる。初期における反時計まわりの弱い流線函数は次第に発達して若干傾斜した楕円形になる。この楕円形の領域は温度場における逆転領域とほぼ一致している。渦度場はある場所では厚くなり、他の場所では薄くなりして水平方向にこれをくり返している。渦度はその薄い場所で発生し、厚い場所に運ばれているように見える。この過程は時間の経過とともにいっそう顕著になる。

§ 5. おわりに

準線型モデルと非線型モデルを使って数値実験的に攪乱の構造の時間変化を追跡するのにある程度成功したと考える。たゞ準線型モデルから非線型モデルに移行するとき $N=2$, $N=3$, $N=4$, $N=5$ のように順を追って調べてい

いのは残念である。これを実行すれば，規則正しい振動から
 順次不規則な振動に移行する過程がよく調べられたと考える。
 また最高 $N=5$ で打切っているが，これをもっとずっと多く
 とると（たとえば $N=20$ ）， Re, Re の十分大きい場合でも，長
 時間の追跡に耐えることができるだろう。そのようにすれば
 スペクトル分布をも見ることが十分可能であろう。前者はす
 ぐにできる問題であり，後者はむしろ将来の問題である。

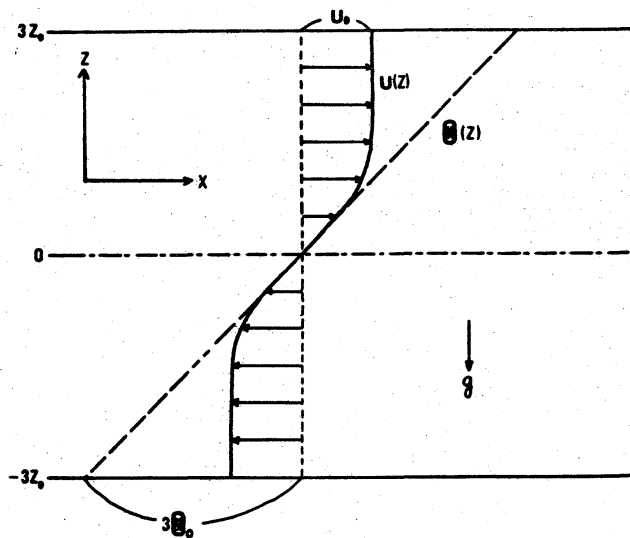
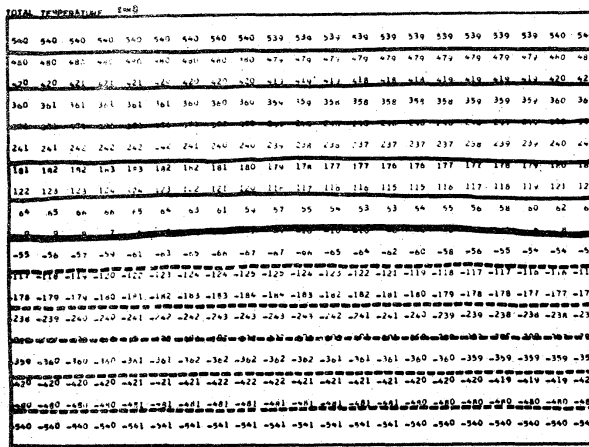
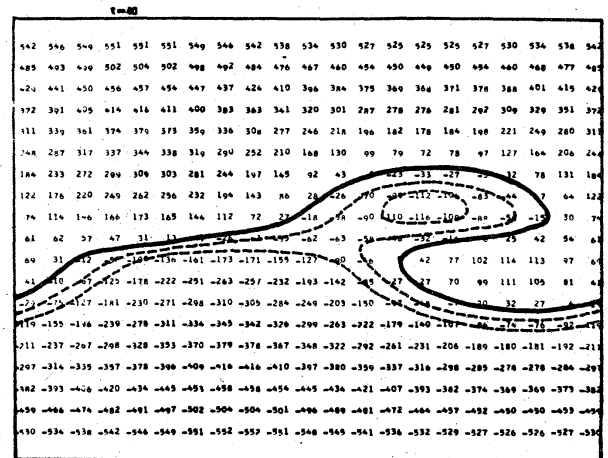


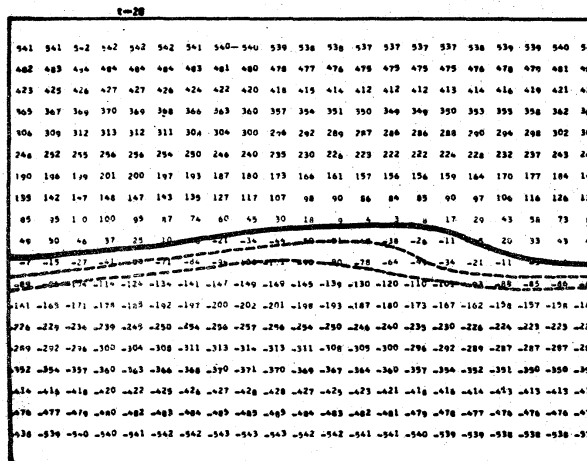
Fig.1 Thermally stable layer with hyperbolic
 tangent shear and linear temperature gradient



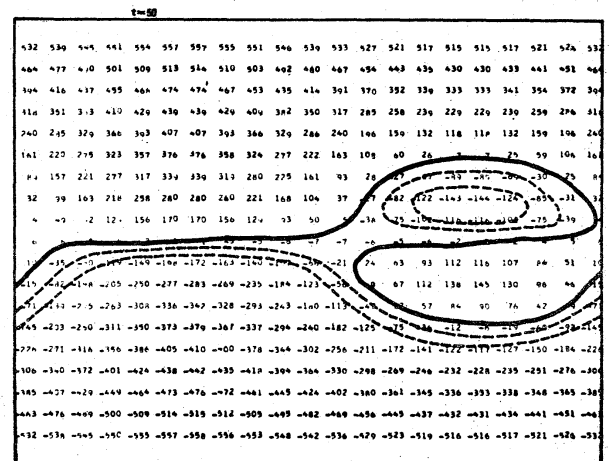
(a)



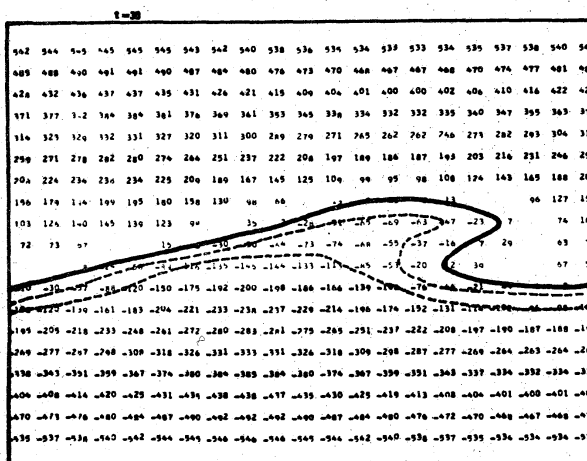
(d)



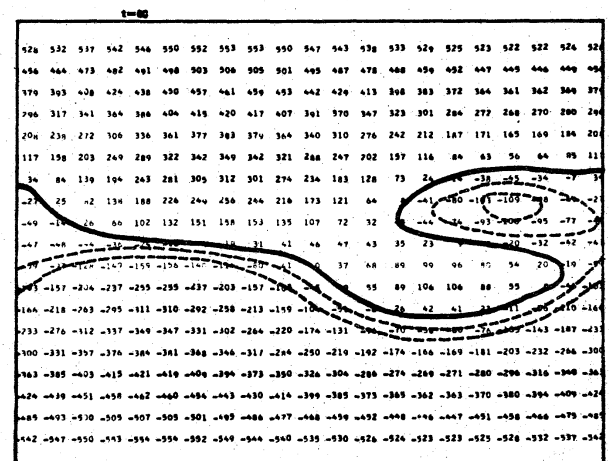
(b)



(e)

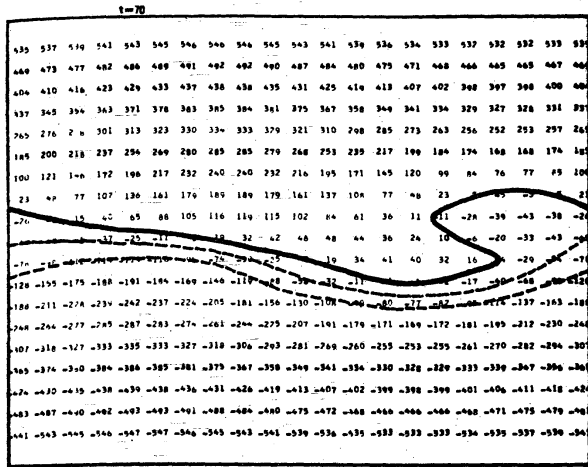


(c)

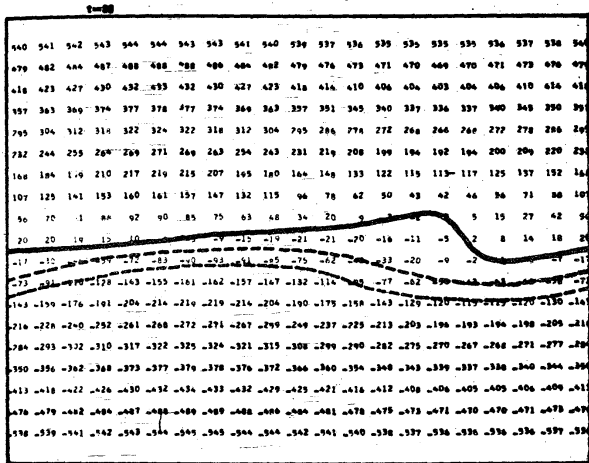


(f)

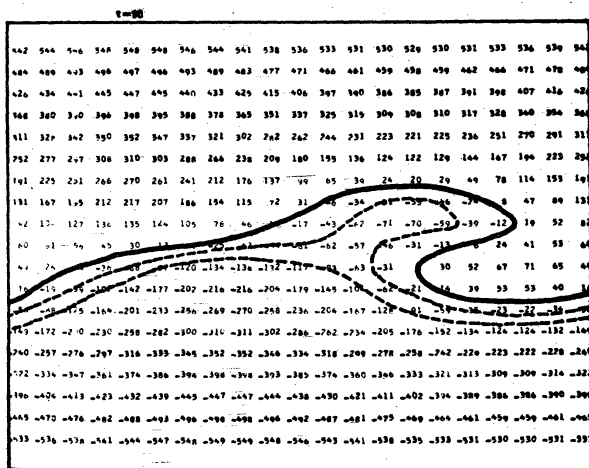
Fig. 2



(g)



(h)



(i)

Fig. 2 Time evolution of the temperature fields in the quasi-linear system obtained by numerical simulation in the case of $Ri=0.1$, $k_{in}=0.5$ and $Re=Pe=10^3$. The periodic change can be found: (a) initial (b) $t=20$ (c) $t=30$ (d) $t=40$ (e) $t=50$ (f) $t=60$ (g) $t=70$ (h) $t=80$ (i) $t=90$

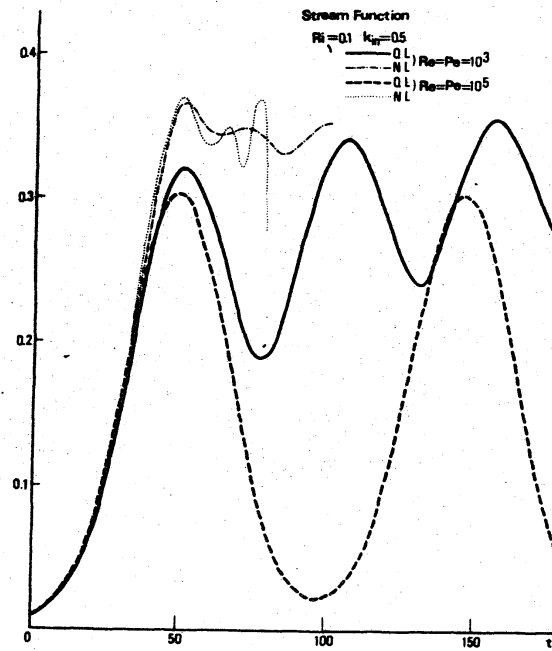


Fig. 3 Time evolution of the amplitude of the stream function at a center level of the layer($z=0$) in the quasi-linear system. Time evolution in the non-linear system is also shown on the figure.

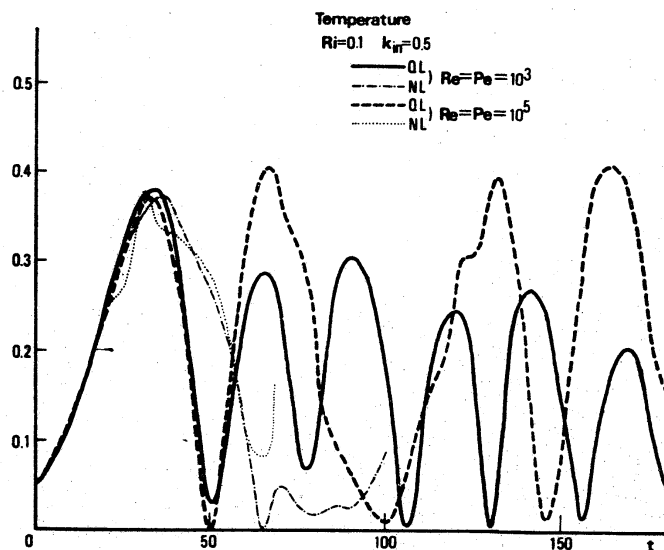


Fig. 4 Same as Fig.3 but with respect to the amplitude of the temperature field.

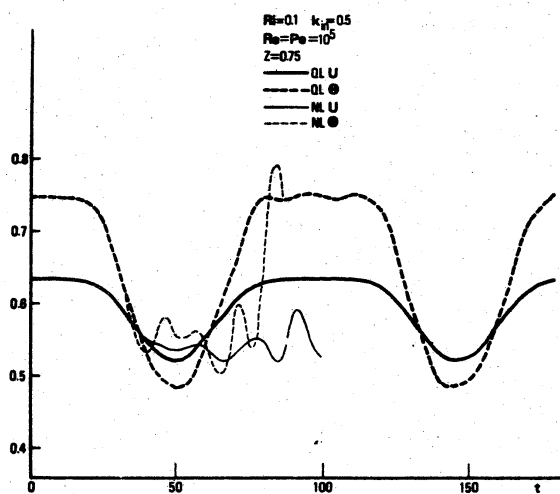


Fig. 5 Time changes of the mean velocity(U) and temperature(Θ) at $z=0.75$ level of the layer in the quasi-linear system. Time changes in the non-linear system are also shown.

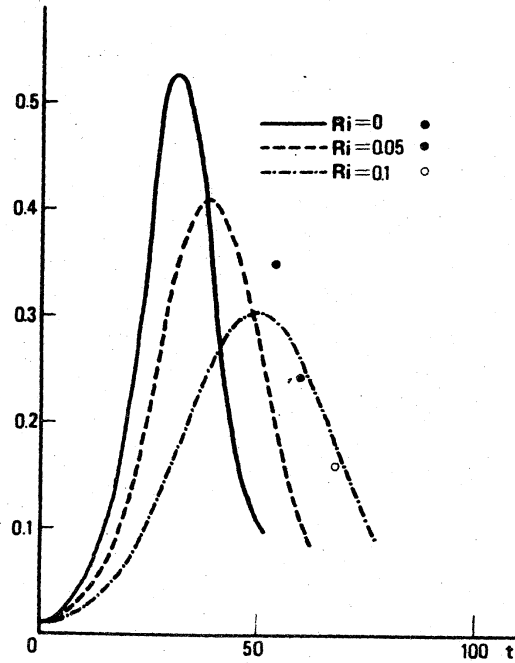


Fig. 6 Time evolutions of the amplitude of the stream function for various Richardson numbers in the case of $k=0.5$. The maximum values of the amplitude of the stream function under shape assumption are also plotted for comparison. The initial amplitude of any case is taken as 1% in common.

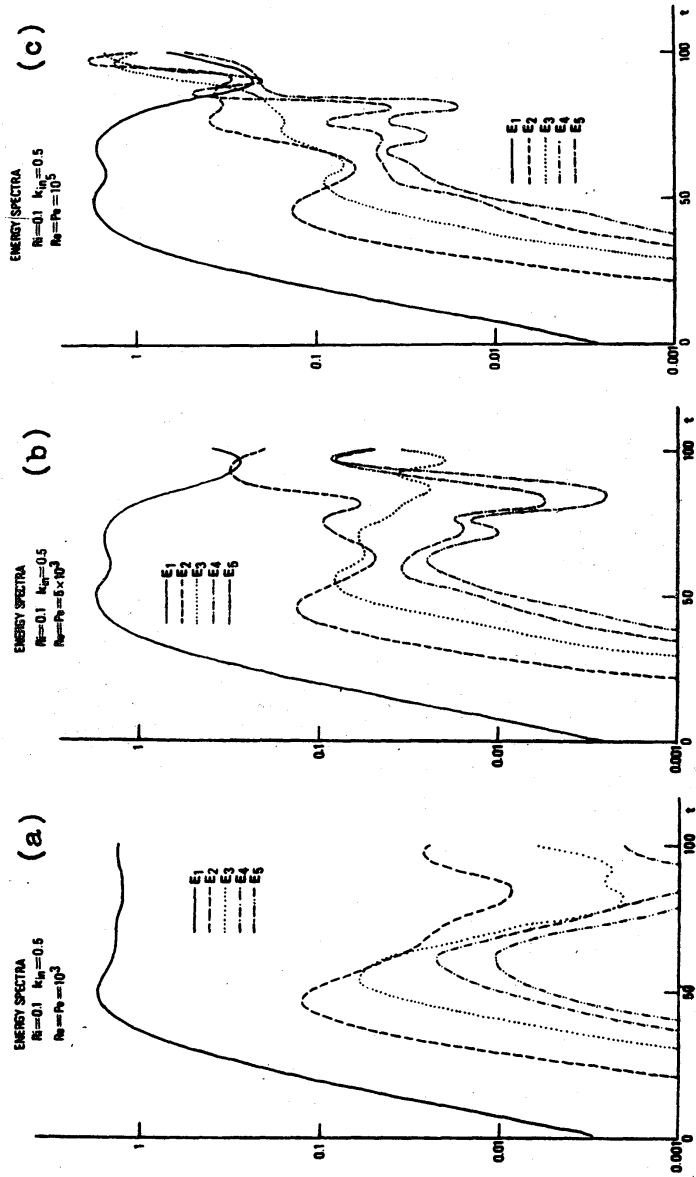
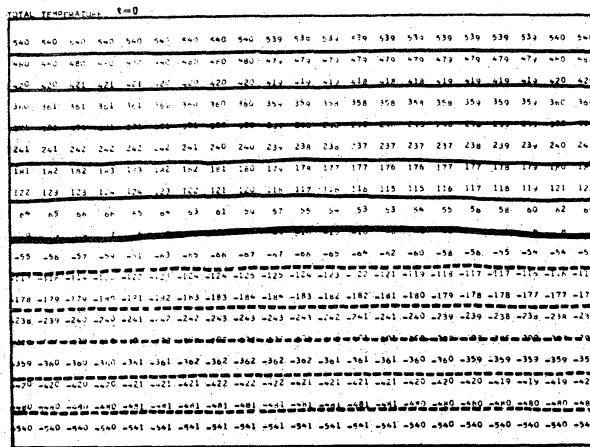
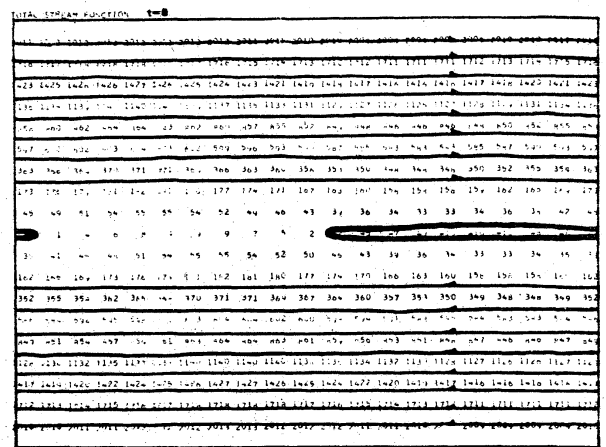


Fig. 7 Time evolutions of the energy spectra in the

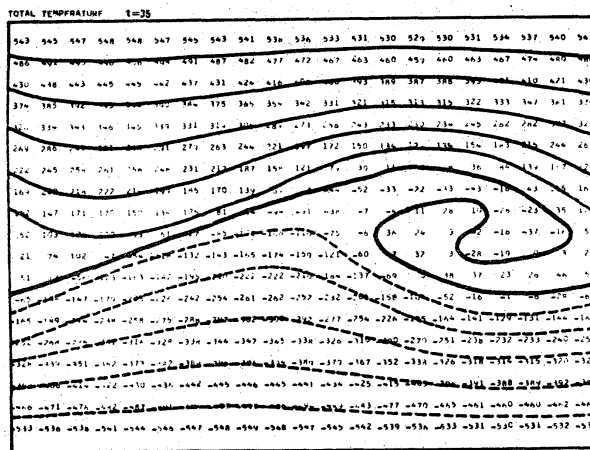
case of $Ri=0.1$ and $k_{in}=0.5$: (a) $Re=Pe=10^3$ (b) $Re=Pe=5 \times 10^3$ (c) $Re=Pe=10^5$.



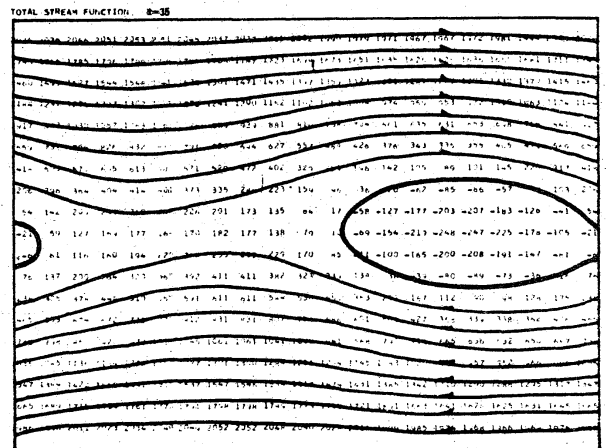
(a)



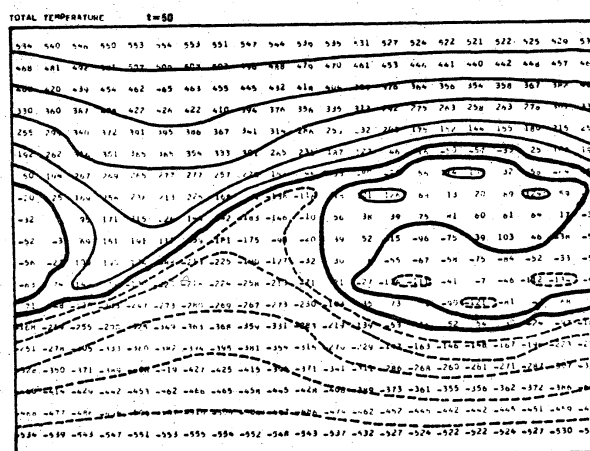
(a)



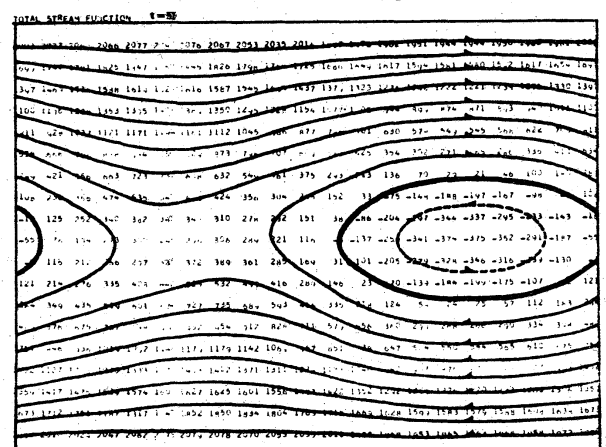
(b)



(b)



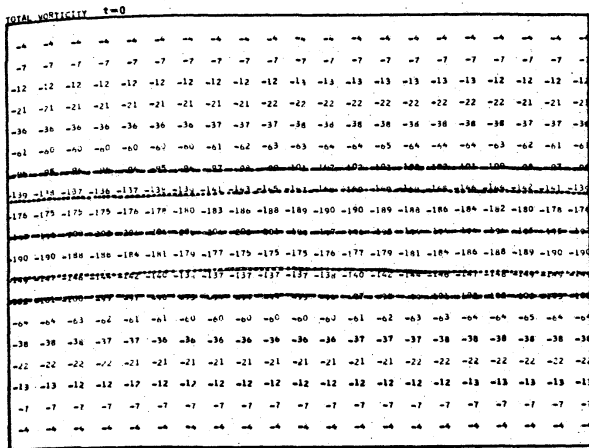
(c)



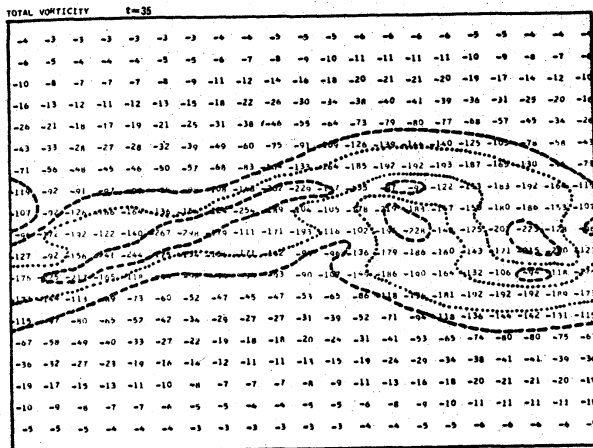
(c)

Fig. 8

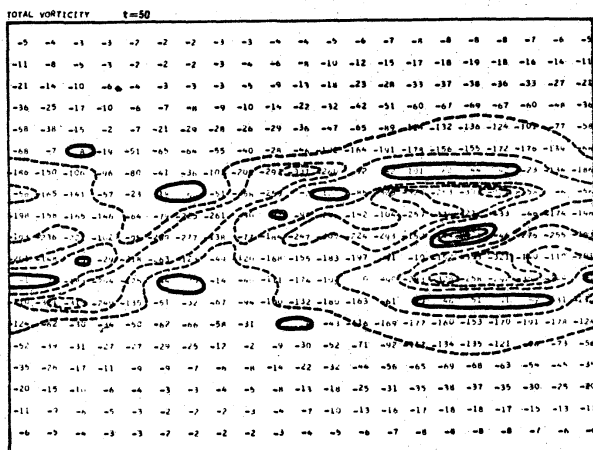
Fig. 8'



(a)



(b)



(c)

Fig. 8''

Fig. 8(a) ~ (c)

Time evolutions of temperature field for $Ri=0.1$, $k=0.5$ and $Re=Pe=10^5$ calculated numerically from the non-linear system: (a) initial (b) $t=35$ (c) $t=50$

Fig. 8'(a) ~ (c)

Same as Fig. 8 but with stream function.

Fig. 8''(a) ~ (c)

Same as Fig. 8 but with vorticity.